ミューオン対不変質量の誤差 $\sigma(M_{\mu^+\mu^-})$ の計算

川田真一

2016 年 7 月 20 日

Abstract

本ノートは $h \to \mu^+\mu^-$ 解析において用いる $\sigma(M_{\mu^+\mu^-})$ の計算を記述したものである。初めに、ミューオン対のみを考慮したその不変質量の誤差 $\sigma(M_{\mu^+\mu^-})$ について議論する。それを踏まえて、ミューオン対のみでなく、FSR photon を用いた補正まで考えた状態で誤差 $\sigma(M_{\mu^+\mu^-})$ を議論する。

1 ミューオン対不変質量の誤差の計算

関数 $f(x_1 \ldots x_n)$ を定義し、変数 $x_1 \ldots x_n$ とそれぞれの分散 $\sigma_{x_1} \ldots \sigma_{x_n}$ および共分散 $\sigma_{x_1 x_2}$ などを考える。関数 f の誤差 Δf は一般的に次式で与えられる。

$$(\Delta f)^2 = \sum_i \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_i} V_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \tag{1}$$

V は共分散行列を表す。

今回考えるのはミューオン対の不変質量である。単一ミューオンの 4 元運動量は $(E_1 \quad p_{1x} \quad p_{1y} \quad p_{1z})$ というように書くことができるので、ミューオン対の不変質量 $M_{\mu^+\mu^-} \equiv M$ は以下のようになる。

$$M = \sqrt{(E_1+E_2)^2 - (p_{1x}+p_{2x})^2 - (p_{1y}+p_{2y})^2 - (p_{1z}+p_{2z})^2} \tag{2}$$

そしてその誤差 $\sigma(M_{\mu^+\mu^-}) \equiv \sigma(M)$ は次のように書ける。

$$\sigma^2(M) = \sum_{i=E_1,p_{1x},p_{1y},p_{1z},E_2,p_{2x},p_{2y},p_{2z}} \; \sum_{j=E_1,p_{1x},p_{1y},p_{1z},E_2,p_{2x},p_{2y},p_{2z}} \frac{\partial M}{\partial x_i} V_{ij} \frac{\partial M}{\partial x_j} \tag{3}$$

この式は全部で 64 項を含む。

まず、偏微分の計算を行ってみよう。例として $\dfrac{\partial M}{\partial E_1}$ と $\dfrac{\partial M}{\partial p_{1x}}$ を考える。結果は以下のようになる。

$$\frac{\partial M}{\partial E_1} = \frac{E_1+E_2}{M} \tag{4}$$

$$\frac{\partial M}{\partial p_{1x}} = -\frac{p_{1x}+p_{2x}}{M} \tag{5}$$

次に、共分散について考える。単一のミューオンの 4 元運動量は、そのミューオンの質量に関わっていることから、例えば E_1 と p_{1x} には相関があり、すなわち共分散 $\sigma_{E_1 p_{1x}}$ を考慮する必要がある。だが、異なるミューオン同士の 4 元運動量は強い相関を持っているとは考えにくい。例えば E_1 と p_{2x} の間にはほとんど相関がないであろう。このように考えると、64 項のうちの半分である 32 項を無視することが可能である。よって、(3) 式は以下のように書き下すことができる。

$$\begin{aligned}\sigma^2(M) = \frac{1}{M^2}\,[\; & E_2\sigma^2_{E_1}E_2 - E_2\sigma_{E_1p_{1x}}p_{2x} - E_2\sigma_{E_1p_{1y}}p_{2y} - E_2\sigma_{E_1p_{1z}}p_{2z} \\ & - p_{2x}\sigma_{p_{1x}E_1}E_2 + p_{2x}\sigma^2_{p_{1x}}p_{2x} + p_{2x}\sigma_{p_{1x}p_{1y}}p_{2y} + p_{2x}\sigma_{p_{1x}p_{1z}}p_{2z}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- p_{2y}\sigma_{p_{1y}E_1}E_2 + p_{2y}\sigma_{p_{1y}p_{1x}}p_{2x} + p_{2y}\sigma^2_{p_{1y}}p_{2y} + p_{2y}\sigma_{p_{1y}p_{1z}}p_{2z} \\
&- p_{2z}\sigma_{p_{1z}E_1}E_2 + p_{2z}\sigma_{p_{1z}p_{1x}}p_{2x} + p_{2z}\sigma_{p_{1z}p_{1y}}p_{2y} + p_{2z}\sigma^2_{p_{1z}}p_{2z} \\
&+ E_1\sigma^2_{E_2}E_1 - E_1\sigma_{E_2p_{2x}}p_{1x} - E_1\sigma_{E_2p_{2y}}p_{1y} - E_1\sigma_{E_2p_{2z}}p_{1z} \\
&- p_{1x}\sigma_{p_{2x}E_2}E_1 + p_{1x}\sigma^2_{p_{2x}}p_{1x} + p_{1x}\sigma_{p_{2x}p_{2y}}p_{1y} + p_{1x}\sigma_{p_{2x}p_{2z}}p_{1z} \\
&- p_{1y}\sigma_{p_{2y}E_2}E_1 + p_{1y}\sigma_{p_{2y}p_{2x}}p_{1x} + p_{1y}\sigma^2_{p_{2y}}p_{1y} + p_{1y}\sigma_{p_{2y}p_{2z}}p_{1z} \\
&- p_{1z}\sigma_{p_{2z}E_2}E_1 + p_{1z}\sigma_{p_{2z}p_{2x}}p_{1x} + p_{1z}\sigma_{p_{2z}p_{2y}}p_{1y} + p_{1z}\sigma^2_{p_{2z}}p_{1z} \;]
\end{aligned} \tag{6}
$$

ここで 4 元運動量を用いた行列 P と共分散行列 Σ を以下のように定義する。

$$
P_i \equiv \begin{pmatrix} E_i \\ p_{ix} \\ p_{iy} \\ p_{iz} \end{pmatrix} \tag{7}
$$

$$
P_i^T \equiv \begin{pmatrix} E_i & -p_{ix} & -p_{iy} & -p_{iz} \end{pmatrix} \tag{8}
$$

$$
\Sigma_i \equiv \begin{pmatrix} \sigma^2_{E_i} & \sigma_{E_ip_{ix}} & \sigma_{E_ip_{iy}} & \sigma_{E_ip_{iz}} \\ \sigma_{p_{ix}E_i} & \sigma^2_{p_{ix}} & \sigma_{p_{ix}p_{iy}} & \sigma_{p_{ix}p_{iz}} \\ \sigma_{p_{iy}E_i} & \sigma_{p_{iy}p_{ix}} & \sigma^2_{p_{iy}} & \sigma_{p_{iy}p_{iz}} \\ \sigma_{p_{iz}E_i} & \sigma_{p_{iz}p_{ix}} & \sigma_{p_{iz}p_{iy}} & \sigma^2_{p_{iz}} \end{pmatrix} \tag{9}
$$

以上の定義を用いると

$$
\sigma^2(M) = \frac{1}{M^2}\left[P_1^T\Sigma_2P_1 + P_2^T\Sigma_1P_2\right] \tag{10}
$$

とまとめることができる。

2 FSR photon による補正まで考えた誤差 $\sigma(M)$ の計算

本章ではミューオン対のみではなく、FSR 補正まで考えたミューオン対の不変質量 $M_{\mu^+\mu^-} \equiv M$ とその誤差 $\sigma(M_{\mu^+\mu^-}) \equiv \sigma(M)$ を議論する。M は以下のようになる。

$$
M = \sqrt{(E_{\mu1} + E_{\mu2} + E_{\gamma1} + E_{\gamma2})^2 - \sum_{\alpha=x,y,z}(p_{\mu1\alpha} + p_{\mu2\alpha} + p_{\gamma1\alpha} + p_{\gamma2\alpha})^2} \tag{11}
$$

ここで $\gamma1(\gamma2)$ は $\mu1(\mu2)$ に補正として加わった光子を表す。これを展開していくと以下の式が得られる。

$$
\begin{aligned}
M = [\\
&M^2_{\mu1} + M^2_{\mu2} + M^2_{\gamma1} + M^2_{\gamma2} \\
&+ 2(E_{\mu1}E_{\mu2} + E_{\mu1}E_{\gamma1} + E_{\mu1}E_{\gamma2} + E_{\mu2}E_{\gamma1} + E_{\mu2}E_{\gamma2} + E_{\gamma1}E_{\gamma2}) \\
&- 2\sum_{\alpha=x,y,z}(p_{\mu1\alpha}p_{\mu2\alpha} + p_{\mu1\alpha}p_{\gamma1\alpha} + p_{\mu1\alpha}p_{\gamma2\alpha} + p_{\mu2\alpha}p_{\gamma1\alpha} + p_{\mu2\alpha}p_{\gamma2\alpha} + p_{\gamma1\alpha}p_{\gamma2\alpha}) \\
&]^{1/2}
\end{aligned} \tag{12}
$$

$M_{\gamma1} = M_{\gamma2} = 0$ GeV であり、$M_h \simeq 125$ GeV $>> M_{\mu1} = M_{\mu2} \simeq 140$ MeV であることから、M は最終的に以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
M = [\\
&2(E_{\mu1}E_{\mu2} + E_{\mu1}E_{\gamma1} + E_{\mu1}E_{\gamma2} + E_{\mu2}E_{\gamma1} + E_{\mu2}E_{\gamma2} + E_{\gamma1}E_{\gamma2}) \\
&- 2\sum_{\alpha=x,y,z}(p_{\mu1\alpha}p_{\mu2\alpha} + p_{\mu1\alpha}p_{\gamma1\alpha} + p_{\mu1\alpha}p_{\gamma2\alpha} + p_{\mu2\alpha}p_{\gamma1\alpha} + p_{\mu2\alpha}p_{\gamma2\alpha} + p_{\gamma1\alpha}p_{\gamma2\alpha}) \\
&]^{1/2}
\end{aligned} \tag{13}
$$

そして $\sigma(M)$ は以下のようになる。

$$
\sigma^2(M) = \sum_{\substack{i=E_{\mu1},p_{\mu1x},p_{\mu1y},p_{\mu1z},\\ E_{\mu2},p_{\mu2x},p_{\mu2y},p_{\mu2z},\\ E_{\gamma1},p_{\gamma1x},p_{\gamma1y},p_{\gamma1z},\\ E_{\gamma2},p_{\gamma2x},p_{\gamma2y},p_{\gamma2z}}} \sum_{\substack{j=E_{\mu1},p_{\mu1x},p_{\mu1y},p_{\mu1z},\\ E_{\mu2},p_{\mu2x},p_{\mu2y},p_{\mu2z},\\ E_{\gamma1},p_{\gamma1x},p_{\gamma1y},p_{\gamma1z},\\ E_{\gamma2},p_{\gamma2x},p_{\gamma2y},p_{\gamma2z}}} \frac{\partial M}{\partial x_i} V_{ij} \frac{\partial M}{\partial x_j} \tag{14}
$$

この式は全部で 256 項を含む。

まず偏微分を計算しよう。例として $\dfrac{\partial M}{\partial E_{\mu1}}$ 及び $\dfrac{\partial M}{\partial p_{\mu1x}}$ を計算する。それぞれ結果は以下のようになる。

$$
\frac{\partial M}{\partial E_{\mu1}} = \frac{E_{\mu2} + E_{\gamma1} + E_{\gamma2}}{M} \tag{15}
$$

$$
\frac{\partial M}{\partial p_{\mu1x}} = -\frac{p_{\mu2x} + p_{\gamma1x} + p_{\gamma2x}}{M} \tag{16}
$$

次に変数同士の相関及び共分散を考える。以下のように、考慮すべき相関としなくてよい相関の 2 つのカテゴリーに分けることができる。

- 考慮する必要がある相関：$\sigma^2_{\mu1}$、$\sigma^2_{\mu2}$、$\sigma^2_{\gamma1}$、$\sigma^2_{\gamma2}$
- 考慮しなくてよい相関：$\sigma_{\mu1\mu2}$、$\sigma_{\mu1\gamma2}$、$\sigma_{\mu2\gamma1}$、$\sigma_{\gamma1\gamma2}$、$\sigma_{\mu1\gamma1}$、$\sigma_{\mu2\gamma2}$

ここから、計算すべき項は 64 項であることが分かる。最終的に以下の式が得られる。

$$
\begin{aligned}
&\sigma^2(M) \\
&= \frac{1}{M^2}[\\
&+(E_{\mu2}+E_{\gamma1}+E_{\gamma2})\sigma^2_{E_{\mu1}}(E_{\mu2}+E_{\gamma1}+E_{\gamma2}) && -(E_{\mu2}+E_{\gamma1}+E_{\gamma2})\sigma_{E_{\mu1}p_{\mu1x}}(p_{\mu2x}+p_{\gamma1x}+p_{\gamma2x}) \\
&-(E_{\mu2}+E_{\gamma1}+E_{\gamma2})\sigma_{E_{\mu1}p_{\mu1y}}(p_{\mu2y}+p_{\gamma1y}+p_{\gamma2y}) && -(E_{\mu2}+E_{\gamma1}+E_{\gamma2})\sigma_{E_{\mu1}p_{\mu1z}}(p_{\mu2z}+p_{\gamma1z}+p_{\gamma2z}) \\
&-(p_{\mu2x}+p_{\gamma1x}+p_{\gamma2x})\sigma_{p_{\mu1x}E_{\mu1}}(E_{\mu2}+E_{\gamma1}+E_{\gamma2}) && +(p_{\mu2x}+p_{\gamma1x}+p_{\gamma2x})\sigma^2_{p_{\mu1x}}(p_{\mu2x}+p_{\gamma1x}+p_{\gamma2x}) \\
&+(p_{\mu2x}+p_{\gamma1x}+p_{\gamma2x})\sigma_{p_{\mu1x}p_{\mu1y}}(p_{\mu2y}+p_{\gamma1y}+p_{\gamma2y}) && +(p_{\mu2x}+p_{\gamma1x}+p_{\gamma2x})\sigma_{p_{\mu1x}p_{\mu1z}}(p_{\mu2z}+p_{\gamma1z}+p_{\gamma2z}) \\
&-(p_{\mu2y}+p_{\gamma1y}+p_{\gamma2y})\sigma_{p_{\mu1y}E_{\mu1}}(E_{\mu2}+E_{\gamma1}+E_{\gamma2}) && +(p_{\mu2y}+p_{\gamma1y}+p_{\gamma2y})\sigma_{p_{\mu1y}p_{\mu1x}}(p_{\mu2x}+p_{\gamma1x}+p_{\gamma2x}) \\
&+(p_{\mu2y}+p_{\gamma1y}+p_{\gamma2y})\sigma^2_{p_{\mu1y}}(p_{\mu2y}+p_{\gamma1y}+p_{\gamma2y}) && +(p_{\mu2y}+p_{\gamma1y}+p_{\gamma2y})\sigma_{p_{\mu1y}p_{\mu1z}}(p_{\mu2z}+p_{\gamma1z}+p_{\gamma2z}) \\
&-(p_{\mu2z}+p_{\gamma1z}+p_{\gamma2z})\sigma_{p_{\mu1z}E_{\mu1}}(E_{\mu1}+E_{\mu2}+E_{\gamma2}) && +(p_{\mu2z}+p_{\gamma1z}+p_{\gamma2z})\sigma_{p_{\mu1z}p_{\mu1x}}(p_{\mu2x}+p_{\gamma1x}+p_{\gamma2x}) \\
&+(p_{\mu2z}+p_{\gamma1z}+p_{\gamma2z})\sigma_{p_{\mu1z}p_{\mu1y}}(p_{\mu2y}+p_{\gamma1y}+p_{\gamma2y}) && +(p_{\mu2z}+p_{\gamma1z}+p_{\gamma2z})\sigma^2_{p_{\mu1z}}(p_{\mu2z}+p_{\gamma1z}+p_{\gamma2z}) \\
\\
&+(E_{\mu1}+E_{\mu2}+E_{\gamma2})\sigma^2_{E_{\gamma1}}(E_{\mu1}+E_{\mu2}+E_{\gamma2}) && -(E_{\mu1}+E_{\mu2}+E_{\gamma2})\sigma_{E_{\gamma1}p_{\gamma1x}}(p_{\mu1x}+p_{\mu2x}+p_{\gamma2x}) \\
&-(E_{\mu1}+E_{\mu2}+E_{\gamma2})\sigma_{E_{\gamma1}p_{\gamma1y}}(p_{\mu1y}+p_{\mu2y}+p_{\gamma2y}) && -(E_{\mu1}+E_{\mu2}+E_{\gamma2})\sigma_{E_{\gamma1}p_{\gamma1z}}(p_{\mu1z}+p_{\mu2z}+p_{\gamma2z}) \\
&-(p_{\mu1x}+p_{\mu2x}+p_{\gamma2x})\sigma_{p_{\gamma1x}E_{\gamma1}}(E_{\mu1}+E_{\mu2}+E_{\gamma2}) && +(p_{\mu1x}+p_{\mu2x}+p_{\gamma2x})\sigma^2_{p_{\gamma1x}}(p_{\mu1x}+p_{\mu2x}+p_{\gamma2x}) \\
&+(p_{\mu1x}+p_{\mu2x}+p_{\gamma2x})\sigma_{p_{\gamma1x}p_{\gamma1y}}(p_{\mu1y}+p_{\mu2y}+p_{\gamma2y}) && +(p_{\mu1x}+p_{\mu2x}+p_{\gamma2x})\sigma_{p_{\gamma1x}p_{\gamma1z}}(p_{\mu1z}+p_{\mu2z}+p_{\gamma2z}) \\
&-(p_{\mu1y}+p_{\mu2y}+p_{\gamma2y})\sigma_{p_{\gamma1y}E_{\gamma1}}(E_{\mu1}+E_{\mu2}+E_{\gamma2}) && +(p_{\mu1y}+p_{\mu2y}+p_{\gamma2y})\sigma_{p_{\gamma1y}p_{\gamma1x}}(p_{\mu1x}+p_{\mu2x}+p_{\gamma2x}) \\
&+(p_{\mu1y}+p_{\mu2y}+p_{\gamma2y})\sigma^2_{p_{\gamma1y}}(p_{\mu1y}+p_{\mu2y}+p_{\gamma2y}) && +(p_{\mu1y}+p_{\mu2y}+p_{\gamma2y})\sigma_{p_{\gamma1y}p_{\gamma1z}}(p_{\mu1z}+p_{\mu2z}+p_{\gamma2z}) \\
&-(p_{\mu1z}+p_{\mu2z}+p_{\gamma2z})\sigma_{p_{\gamma1z}E_{\gamma1}}(E_{\mu1}+E_{\mu2}+E_{\gamma2}) && +(p_{\mu1z}+p_{\mu2z}+p_{\gamma2z})\sigma_{p_{\gamma1z}p_{\gamma1x}}(p_{\mu1x}+p_{\mu2x}+p_{\gamma2x}) \\
&+(p_{\mu1z}+p_{\mu2z}+p_{\gamma2z})\sigma_{p_{\gamma1z}p_{\gamma1y}}(p_{\mu1y}+p_{\mu2y}+p_{\gamma2y}) && +(p_{\mu1z}+p_{\mu2z}+p_{\gamma2z})\sigma^2_{p_{\gamma1z}}(p_{\mu1z}+p_{\mu2z}+p_{\gamma2z}) \\
&-(p_{\mu1z}+p_{\mu2z}+p_{\gamma2z})\sigma_{p_{\gamma1z}E_{\gamma1}}(E_{\mu1}+E_{\mu2}+E_{\gamma2}) && +(p_{\mu1z}+p_{\mu2z}+p_{\gamma2z})\sigma_{p_{\gamma1z}p_{\gamma1x}}(p_{\mu1x}+p_{\mu2x}+p_{\gamma2x}) \\
&+(p_{\mu1z}+p_{\mu2z}+p_{\gamma2z})\sigma_{p_{\gamma1z}p_{\gamma1y}}(p_{\mu1y}+p_{\mu2y}+p_{\gamma2y}) && +(p_{\mu1z}+p_{\mu2z}+p_{\gamma2z})\sigma_{p_{\gamma1z}p_{\gamma1z}}(p_{\mu1z}+p_{\mu2z}+p_{\gamma2z}) \\
\\
&+(E_{\mu1}+E_{\gamma1}+E_{\gamma2})\sigma^2_{E_{\mu2}}(E_{\mu1}+E_{\gamma1}+E_{\gamma2}) && -(E_{\mu1}+E_{\gamma1}+E_{\gamma2})\sigma_{E_{\mu2}p_{\mu2x}}(p_{\mu1x}+p_{\gamma1x}+p_{\gamma2x}) \\
&-(E_{\mu1}+E_{\gamma1}+E_{\gamma2})\sigma_{E_{\mu2}p_{\mu2y}}(p_{\mu1y}+p_{\gamma1y}+p_{\gamma2y}) && -(E_{\mu1}+E_{\gamma1}+E_{\gamma2})\sigma_{E_{\mu2}p_{\mu2z}}(p_{\mu1z}+p_{\gamma1z}+p_{\gamma2z}) \\
&-(p_{\mu1x}+p_{\gamma1x}+p_{\gamma2x})\sigma_{p_{\mu2x}E_{\mu2}}(E_{\mu1}+E_{\gamma1}+E_{\gamma2}) && +(p_{\mu1x}+p_{\gamma1x}+p_{\gamma2x})\sigma^2_{p_{\mu2x}}(p_{\mu1x}+p_{\gamma1x}+p_{\gamma2x}) \\
&+(p_{\mu1x}+p_{\gamma1x}+p_{\gamma2x})\sigma_{p_{\mu2x}p_{\mu2y}}(p_{\mu1y}+p_{\gamma1y}+p_{\gamma2y}) && +(p_{\mu1x}+p_{\gamma1x}+p_{\gamma2x})\sigma_{p_{\mu2x}p_{\mu2z}}(p_{\mu1z}+p_{\gamma1z}+p_{\gamma2z}) \\
&-(p_{\mu1y}+p_{\gamma1y}+p_{\gamma2y})\sigma_{p_{\mu2y}E_{\mu2}}(E_{\mu1}+E_{\gamma1}+E_{\gamma2}) && +(p_{\mu1y}+p_{\gamma1y}+p_{\gamma2y})\sigma_{p_{\mu2y}p_{\mu2x}}(p_{\mu1x}+p_{\gamma1x}+p_{\gamma2x}) \\
&+(p_{\mu1y}+p_{\gamma1y}+p_{\gamma2y})\sigma^2_{p_{\mu2y}}(p_{\mu1y}+p_{\gamma1y}+p_{\gamma2y}) && +(p_{\mu1y}+p_{\gamma1y}+p_{\gamma2y})\sigma_{p_{\mu2y}p_{\mu2z}}(p_{\mu1z}+p_{\gamma1z}+p_{\gamma2z}) \\
&-(p_{\mu1z}+p_{\gamma1z}+p_{\gamma2z})\sigma_{p_{\mu2z}E_{\mu2}}(E_{\mu1}+E_{\gamma1}+E_{\gamma2}) && +(p_{\mu1z}+p_{\gamma1z}+p_{\gamma2z})\sigma_{p_{\mu2z}p_{\mu2x}}(p_{\mu1x}+p_{\gamma1x}+p_{\gamma2x})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+(p_{\mu1z}+p_{\gamma1z}+p_{\gamma2z})\sigma_{p_{\mu2z}p_{\mu2y}}(p_{\mu1y}+p_{\gamma1y}+p_{\gamma2y}) && +(p_{\mu1z}+p_{\gamma1z}+p_{\gamma2z})\sigma^2_{p_{\mu2z}}(p_{\mu1z}+p_{\gamma1z}+p_{\gamma2z}) \\
\\
&+(E_{\mu1}+E_{\mu2}+E_{\gamma1})\sigma^2_{E_{\gamma2}}(E_{\mu1}+E_{\mu2}+E_{\gamma1}) && -(E_{\mu1}+E_{\mu2}+E_{\gamma1})\sigma_{E_{\gamma2}p_{\gamma2x}}(p_{\mu1x}+p_{\mu2x}+p_{\gamma1x}) \\
&-(E_{\mu1}+E_{\mu2}+E_{\gamma1})\sigma_{E_{\gamma2}p_{\gamma2y}}(p_{\mu1y}+p_{\mu2y}+p_{\gamma1y}) && -(E_{\mu1}+E_{\mu2}+E_{\gamma1})\sigma_{E_{\gamma2}p_{\gamma2z}}(p_{\mu1z}+p_{\mu2z}+p_{\gamma1z}) \\
&-(p_{\mu1x}+p_{\mu2x}+p_{\gamma1x})\sigma_{p_{\gamma2x}E_{\gamma2}}(E_{\mu1}+E_{\mu2}+E_{\gamma1}) && +(p_{\mu1x}+p_{\mu2x}+p_{\gamma1x})\sigma^2_{p_{\gamma2x}}(p_{\mu1x}+p_{\mu2x}+p_{\gamma1x}) \\
&+(p_{\mu1x}+p_{\mu2x}+p_{\gamma1x})\sigma_{p_{\gamma2x}p_{\gamma2y}}(p_{\mu1y}+p_{\mu2y}+p_{\gamma1y}) && +(p_{\mu1x}+p_{\mu2x}+p_{\gamma1x})\sigma_{p_{\gamma2x}p_{\gamma2z}}(p_{\mu1z}+p_{\mu2z}+p_{\gamma1z}) \\
&-(p_{\mu1y}+p_{\mu2y}+p_{\gamma1y})\sigma_{p_{\gamma2y}E_{\gamma2}}(E_{\mu1}+E_{\mu2}+E_{\gamma1}) && +(p_{\mu1y}+p_{\mu2y}+p_{\gamma1y})\sigma_{p_{\gamma2y}p_{\gamma2x}}(p_{\mu1x}+p_{\mu2x}+p_{\gamma1x}) \\
&+(p_{\mu1y}+p_{\mu2y}+p_{\gamma1y})\sigma^2_{p_{\gamma2y}}(p_{\mu1y}+p_{\mu2y}+p_{\gamma1y}) && +(p_{\mu1y}+p_{\mu2y}+p_{\gamma1y})\sigma_{p_{\gamma2y}p_{\gamma2z}}(p_{\mu1z}+p_{\mu2z}+p_{\mu1z}) \\
&-(p_{\mu1z}+p_{\mu2z}+p_{\gamma1z})\sigma_{p_{\gamma2z}E_{\gamma2}}(E_{\mu1}+E_{\mu2}+E_{\gamma1}) && +(p_{\mu1z}+p_{\mu2z}+p_{\gamma1z})\sigma_{p_{\gamma2z}p_{\gamma2x}}(p_{\mu1x}+p_{\mu2x}+p_{\gamma1x}) \\
&+(p_{\mu1z}+p_{\mu2z}+p_{\gamma1z})\sigma_{p_{\gamma2z}p_{\gamma2y}}(p_{\mu1y}+p_{\mu2y}+p_{\gamma1y}) && +(p_{\mu1z}+p_{\mu2z}+p_{\gamma1z})\sigma^2_{p_{\gamma2z}}(p_{\mu1z}+p_{\mu2z}+p_{\mu1z}) \\
&]
\end{aligned} \tag{17}
$$

さて、この複雑な式において、$\mu 1$ に関する共分散だけを含む 16 項に着目しよう。次のような変数と共分散行列を定義する。

$$
E_{\neg\mu1} \equiv E_{\mu2}+E_{\gamma1}+E_{\gamma2} \tag{18}
$$

$$
p_{\neg\mu1\alpha} \equiv p_{\mu2\alpha}+p_{\gamma1\alpha}+p_{\gamma2\alpha} \quad (\alpha = x, y, z) \tag{19}
$$

$$
P_{\neg\mu1} \equiv \begin{pmatrix} E_{\neg\mu1} \\ p_{\neg\mu1x} \\ p_{\neg\mu1y} \\ p_{\neg\mu1z} \end{pmatrix} \tag{20}
$$

$$
P^T_{\neg\mu1} \equiv \begin{pmatrix} E_{\neg\mu1} & -p_{\neg\mu1x} & -p_{\neg\mu1y} & -p_{\neg\mu1z} \end{pmatrix} \tag{21}
$$

$$
\Sigma_{\mu1} \equiv \begin{pmatrix} \sigma^2_{E_{\mu1}} & \sigma_{E_{\mu1}p_{\mu1x}} & \sigma_{E_{\mu1}p_{\mu1y}} & \sigma_{E_{\mu1}p_{\mu1z}} \\ \sigma_{p_{\mu1x}E_{\mu1}} & \sigma^2_{p_{\mu1x}} & \sigma_{p_{\mu1x}p_{\mu1y}} & \sigma_{p_{\mu1x}p_{\mu1z}} \\ \sigma_{p_{\mu1y}E_{\mu1}} & \sigma_{p_{\mu1y}p_{\mu1x}} & \sigma^2_{p_{\mu1y}} & \sigma_{p_{\mu1y}p_{\mu1z}} \\ \sigma_{p_{\mu1z}E_{\mu1}} & \sigma_{p_{\mu1z}p_{\mu1x}} & \sigma_{p_{\mu1z}p_{\mu1y}} & \sigma^2_{p_{\mu1z}} \end{pmatrix} \tag{22}
$$

「¬」は数学記号で否定を意味するが、ここでは例えば「$E_{\neg\mu1}$」と書いて「$E_{\mu1}$ は含まず、それ以外の 3 つを含む」という意味で用いている。同じようなものを $\mu 2$、$\gamma 1$、$\gamma 2$ に対しても定義できる。以上の定義を用いると、$\sigma(M)$ は最終的に次のようになる。

$$
\sigma^2(M) = \frac{1}{M^2}\left[P^T_{\neg\mu1}\Sigma_{\mu1}P_{\neg\mu1} + P^T_{\neg\mu2}\Sigma_{\mu2}P_{\neg\mu2} + P^T_{\neg\gamma1}\Sigma_{\gamma1}P_{\neg\gamma1} + P^T_{\neg\gamma2}\Sigma_{\gamma2}P_{\neg\gamma2}\right] \tag{23}
$$